УДК 681.5

РАЗМЕЩЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДОМИНИРУЮЩИХ ПОЛЮСОВ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ЗАДАННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА

С.В. Замятин

Томский политехнический университет
E-mail: zamsv@aics.ru

Рассматривается система управления с интервально-заданными параметрами. В коэффициенты характеристического полинома данной системы входят интервально-заданные и настраиваемые параметры. Предлагается подход, позволяющий расположить области локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемых корневых показателей качества и локализовать остальные ее полюса в заданной области комплексной плоскости.

1. Введение

Важной задачей, решаемой при проектировании систем автоматического управления, является задача обеспечения требуемого качества переходных процессов, которое зависит от расположения полюсов замкнутой системы. Также известно, что динамические свойства системы определяются только ее двумя-тремя доминирующими полюсами [1]. Для стационарной системы решение задачи размещения доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости рассматривается в работах [2, 3]. В [3] рассматривается возможность не только обеспечивать требуемое положение назначаемых доминирующих полюсов, но и размещать остальные (свободные) полюсы в желаемой области.

Так как большинство реальных систем автоматического управления имеют интервальные параметры, то представляет интерес определение настраиваемых параметров с целью получить гарантированные показатели качества интервальной системы. Если передаточные функции систем содержат полиномы с интервальными коэффициентами, то согласно [4] они классифицируются как линейные интервальные динамические системы (ЛИДС). Решение задачи размещения полюсов систем с интервальными полиномами рассматривается в ряде работ [5, 6]. Однако предлагаемые в этих работах методы синтеза регуляторов предусматривают, что все компоненты вектора состояния должны быть доступны для измерения. В этой связи представляет интерес робастное расширение подхода, предложенного в [3] и позволяющего для решения поставленной задачи использовать линейный динамический регулятор по выходу. Желаемое размещение доминирующих и свободных полюсов предполагает, что области их локализации не должны выходить за допустимые границы, определяющие колебательность и запас устойчивости системы при любых значениях интервальных параметров.

2. Постановка задачи

Характеристический полином ЛИДС может быть представлен в виде

$$R(p)=\sum_{i=0}^{n} a_i(\bar{k},\bar{q})p^i, \qquad (1)$$

где p – оператор Лапласа, $\bar{q}$ – вектор интервальных параметров системы, $\bar{k}$ – вектор настраиваемых параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты полинома (1), a_i – коэффициенты полинома (1), вычисленные в соответствии с правилами интервальной арифметики (далее будут рассматриваться как независимые).

Необходимо выбрать такие значения параметров k_i, $i=1,2,...,r$, чтобы при возможных вариациях интервальных коэффициентов полинома (1) обеспечивались требуемые колебательность и запас устойчивости ЛИДС, а свободные полюсы были локализованы в заданной области.

Так как в выражение (1) входят интервальные коэффициенты, то оно соответствует семейству полиномов. Очевидно, что применение методики [3] к каждому полиному этого семейства невозможно. Поэтому желательно найти условия, позволяющие судить о показателях качества ЛИДС по одному полиному. Поставленная задача разделяется на две:

1. Выделение из заданного семейства полиномов одного полинома $R_b(p)$, корни которого будут гарантированно определять максимальную колебательность и минимальный запас устойчивости интервальной системы.
2. Размещение корней найденного полинома желаемым образом (с соблюдением принципа доминирования).

3. Анализ областей расположения свободных полюсов

Пусть m полюсов p_g, $g=\overline{1,m}$, полинома (1) лежат левее полюса p_0. Обозначим через Θ_g угол между вещественной осью и вектором, направленным к полюсу p_0 от полюса p_g (рис. 1).

Пусть $m=2$, $p_{1,2}=-\alpha_1\pm j\beta_1$, $p_0=-\alpha_2+j\beta_2$. Используя тригонометрические соотношения, получим

$$\sum_{g=1}^{m}\Theta_g=\operatorname{arcctg}\left(\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_2^2-\beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)}\right). \qquad (2)$$

Обозначим $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$ через C. На основании (2) построим на плоскости корней область свободных

полюсов, соответствующих C, которые меньше некоторого фиксированного значения, рис. 2.

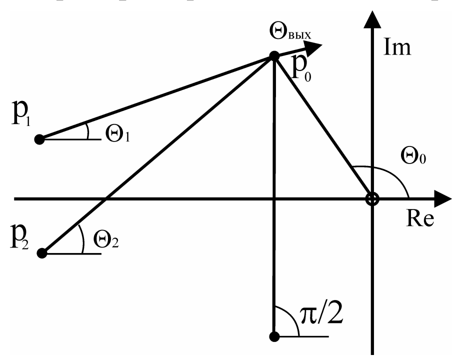


Рис. 1. *Расположение полюсов и нулей при m=2*

В (2) a_i принимает максимальное значение при $\beta_1=0$ и является монотонно убывающей функцией от C, следовательно, области, располагающиеся левее, будут иметь меньшее значение C. Поэтому для того, чтобы обеспечить доминирующее расположение корней, далее будем рассматривать такие наборы коэффициентов (1), при которых минимальное значение $C=0$. Область, соответствующую данному интервалу значений C, обозначим через S_0.

Далее будем рассматривать только эту область, минимальное значение C, соответствующее этой области, обозначим $\min C$, а максимальное – $\max C$.

Уравнение прямой d (рис. 2), параллельной мнимой оси, левее которой всегда располагается S_0, определяется из выражения:

$$\max C = m \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_2}{d-\alpha_2}\right). \tag{3}$$

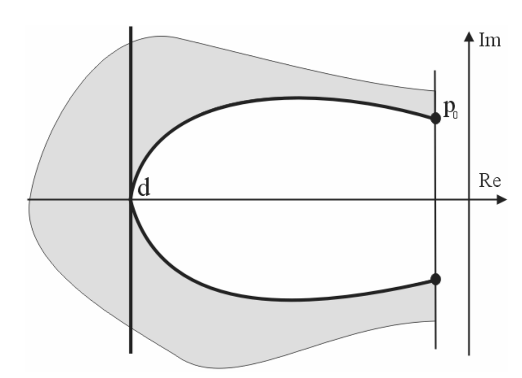


Рис. 2. *Область расположения свободных полюсов*

4. Определение вершинного полинома для вычисления настраиваемых параметров

Для вычисления настраиваемых параметров k_i, $i=1,2,...,r$ требуется выделить полином $R_b(p)$, корни которого определяют наихудшие показатели качества всего заданного семейства полиномов (1). Для этого воспользуемся фазовыми соотношениями углов выхода ветвей корневого годографа [7]. Угол выхода из комплексного корня при увеличении интервального коэффициента a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = \pi - \left(\sum_{g=1}^{m}\Theta_g + \frac{\pi}{2}\right) + i\Theta_0, \tag{4}$$

а при уменьшении a_i как

$$\Theta_i^q = -\left(\sum_{g=1}^{m}\Theta_g + \frac{\pi}{2}\right) + i\Theta_0, \tag{5}$$

где Θ_g и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными к полюсу p_0 от g-ого полюса и от i-ых нулей с координатами $(0;j0)$, соответственно. Величина $\frac{\pi}{2}$ добавлена в связи с учетом корня, комплексно-сопряженного p_0. Значение $\sum_{g=1}^{m}\Theta_g$ по коэффициенту a_i обозначим через C_i.

На основании (4) и (5), получим условие для углов выхода корня, определяющего максимальную колебательность и минимальный запас устойчивости.

Условие: для того, чтобы корень, соответствующий некоторому вершинному полиному, определял максимальную колебательность и минимальный запас устойчивости области его локализации, необходимо, чтобы векторы, задающие углы выхода данного корня по всем параметрам a_i, $i=\overline{0,n}$, были направлены внутрь сектора $\Gamma \in \left[\Theta_0, \frac{3\pi}{2}\right]$, рис. 3, т. е. выполнялось условие:

$$\Theta_0 < i\Theta_0 - (C_i + \frac{\pi}{2}) + \Omega < \frac{3\pi}{2}, \tag{6}$$

где $\Omega=0,\pi$ в зависимости от того, увеличивается или уменьшается интервальный параметр.

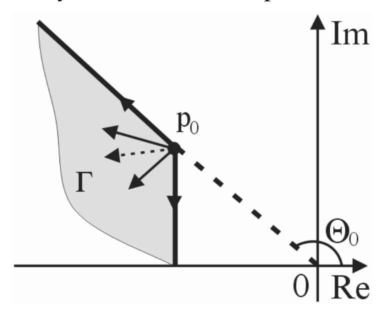


Рис. 3. *Направление векторов углов выхода*

Из условия (6) видно, что при заданном Θ_0 на величину угла выхода Θ_i^q будет влиять только значение C_i, причем при его увеличении величина угла выхода Θ_i^q будет уменьшаться. Условие (6) выполняется для $\Theta_i^q=\Theta_0$ только при $C_i=\max C_i$. Из (4), (5) получим

$$\Theta_0 = i\Theta_0 - (\max C_i + \frac{\pi}{2}) + \Omega,$$

тогда

$$\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2} + \Omega. \tag{7}$$

Условие (6) выполняется при $\Theta_i^q = \frac{3\pi}{2}$, только для $C_i=\min C_i$, тогда из (4), (5) получим

$$\min C_i = i\Theta_0 + \Omega. \quad (8)$$

Для того, чтобы свободные полюсы располагались в S_0, необходимо, чтобы $\min C_i=0$. Из (7) и (8) видно, что $\max C_i$ может отличаться от $\min C_i$ не больше, чем на $\frac{3\pi}{2}-\Theta_0$, тогда $\max C_i \in [0; \frac{3\pi}{2}-\Theta_0]$. Отсюда получим условия формирования полинома $R_b(p)$.

Если

$$\Theta_0(i-1) \in (\frac{\pi}{2}; -\Theta_0),$$

то

$$\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2},$$

и значение коэффициента $a_i = \max a_i = \overline{a_i}$.

Если

$$\Theta_0(i-1) \in (-\frac{\pi}{2}; \pi - \Theta_0),$$

то

$$\max C_i = \Theta_0(i-1) + \frac{\pi}{2},$$

и значение коэффициента $a_i = \min a_i = \underline{a_i}$.

Тогда для определения области S_0 и набора коэффициентов полинома требуется определить наименьшее значение $\max C_i$ при всех $i=\overline{0,n}$ и пределы соответствующих коэффициентов.

Следует отметить, что если

$$\Theta_0(i-1) \notin (\frac{\pi}{2}; -\Theta_0) \cap (-\frac{\pi}{2}; \pi - \Theta_0),$$

то при выполнении принципа доминирования, области локализации доминирующих корней не могут размещаться в заданном секторе.

5. Методика размещения полюсов

На основании проведенных исследований разработана следующая методика размещения полюсов линейной интервальной динамической системы в заданном усеченном секторе.

1. Задаются желаемые координаты доминирующих полюсов ЛИДС, определяющие ее максимальную колебательность и минимальный запас устойчивости.
2. Из условия формирования полинома $R_b(p)$: определяется минимальное значение $\max C_i$ (соответствующее Θ_0, координатам доминирующих полюсов и степени полинома) и соответствующий набор пределов коэффициентов полинома $R_b(p)$.
3. На основании (4) определяется уравнение прямой *d*, левее которой гарантированно располагается S_0.
4. Полином (2) приводится к виду
$$\sum_{i=1}^{r} k_i A_i(p) + B(p) = 0.$$
5. Согласно методике [3] определяются настраиваемые параметры, обеспечивающие желаемое расположение корней полинома R_b.
6. Проверяется расположение областей локализации доминирующих и свободных полюсов интервальной системы с найденными настройками. В случае выхода областей за заданные границы следует увеличить число настраиваемых коэффициентов.

Заключение

Предложенный подход позволяет размещать области локализации доминирующих полюсов интервальной системы с гарантированными корневыми показателями качества, а ее свободные полюса – в соответствии с принципом доминирования на основе выполнения фазовых соотношений метода корневого годографа. Возможность выделения из семейства только одного полинома, гарантирующего желаемую динамику интервальной системы, позволяет применять к таким системам методы, разработанные для стационарных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райцын Т.М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. – Л.: Энергия, 1970. – 96 с.
2. Скворцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 4. – С. 10–13.
3. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 23–27.
4. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н. Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы) // Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3–23.
5. Хлебалин Н.А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов: Саратовский политех. ин-т, 1988. – С. 26–30.
6. Захаров А.В. Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 299. – № 2. – С. 292–295.
7. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. – М.: Наука, 1972. – 448 с.